

التمرين الاول (3.25 ن)

لكل عدد حقيقي a نعتبر المصفوفة $M(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & -2a \\ 4a & 1-4a \end{pmatrix}$ ولتكن E المجموعة المعرفة بـ

$$E = \left\{ M(a) / a \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\}$$

جزء 1

لكل x و y من $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ نضع $x * y = x + y - 2xy$.

1. بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

0.25

2. بين أن $(\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}, *)$ زمرة تبادلية.

0.75

3. لكل x من $\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ ولكل n من \mathbb{N}^* نضع $x = x^{(1)}$ و $x^{(n)} * x = x^{(n+1)}$.

0.5

$$x^{(n)} = \frac{1 - (1-2x)^n}{2} \quad \mathbb{N}^* \text{ من } n \text{ لـ}$$

جزء 2

1. تأكد أن E جزء مستقر في $(M_2(\mathbb{R}), \times)$.

0.25

2. نعتبر التطبيق المعرف بما يلي $\varphi: \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \rightarrow E$

$$a \mapsto M(a)$$

أ. بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}, *)$ نحو (E, \times) .

0.5

ب. استنتج بنية (E, \times) وحدد مقلوب كل مصفوفة $M(a)$ في E .

0.5

3. حل في E المعادلة $X^3 = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ -14 & 15 \end{pmatrix}$.

0.5

التمرين الثاني (3.75 ن)

جزء 1

1. اكتب على الشكل الجبري العددين العقديين $(1+i\sqrt{3})^2$ و $(-1+i\sqrt{3})^2$.

0.25

2. حل في \mathbb{C} المعادلة $z^2 - (i\sqrt{3}-1)z - i\sqrt{3} = 0$.

0.5

3. لتكن A و B و C ثلاث نقط في المستوى العقدي ذات اللاحق $a=1$ و $b=-1$ و $c=i\sqrt{3}$ على التوالي.

أ. تحقق أن $\frac{a-c}{b-c} = f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ حيث $f(\theta) = \sin\theta \left(1 + i \tan\left(\frac{2\theta + \pi}{4}\right)\right)$ لكل θ من $\left]-\pi, \pi\right[- \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$.

0.25

ب. استنتج طبيعة المثلث ABC .

0.25

جزء 2

1. اكتب $f(\theta)$ على الشكل المثلثي (ناقش حسب قيم θ) . 0.5

2. بين أن $f(\theta) = \frac{e^{2i\theta} - 1}{ie^{i\theta} + 1}$. 0.75

3. لكل θ من $]-\pi, \pi[- \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$ نعتبر التطبيق ψ المعرف بما يلي $\psi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ حيث $\psi(z) = f(\theta)(i - z)$ لكل z من \mathbb{C} .

أ. حل في \mathbb{C} المعادلة $\psi(z) = z$ (ناقش حسب قيم θ) . 0.5

ب. حدد حسب قيم θ طبيعة التطبيق ψ وعناصره المميزة. 0.75

التمرين الثالث (3 ن)

جزء 1

1. اكتب العدد 25 على شكل مجموع مربعي عددين صحيحين نسبيين غير منعدمين ثم استنتج أن مربعات مضاعفات العدد 5 تكتب على شكل مجموع مربعين كاملين. 0.5

ب. اكتب على شكل مجموع مربعي عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين العدد 4225 . 0.5

2. بين انه اذا كان مجموع مربعي عددين صحيحين نسبيين مربعا كاملا فان احد هذين العددين على الأقل مضاعف للعدد 3 (يمكن استعمال مبرهنة فيرما) . 0.75

جزء 2

نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة $(E): 9x^2 + 16y^2 = 25xy$. 0.75

1. بين انه اذا كان الزوج (x, y) حيث $x \neq y$ حلا للمعادلة (E) فان $9x - 16y = 0$.

2. حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) . 0.5

التمرين الرابع (10 ن)

جزء 1 :

لكل n من \mathbb{N} نعتبر الدالة g_n المعرفة بـ : $g_n(x) = x^2 + 1 - 2x(\ln x + n)$

(1) ادرس تغيرات g_n على \mathbb{R}^{*+} 0.25

(2) احسب نهايات g_n عند $+\infty$ وعلى اليمين في الصفر 0.5

(3) أ- بين أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا u_n في \mathbb{R}^{*+} 0.5

ب- استنتج إشارة g_n على \mathbb{R}^{*+} 0.25

جزء 2

لكل n من \mathbb{N} نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة بـ : $f_n(x) = \frac{\ln x + n}{x^2 + 1}$

و (C_n) منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$

(1) أ- بين أن f_n قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^{*+} وأن $f'_n(x) = \frac{g_n(x)}{x(x^2 + 1)^2}$. $\forall x > 0$ 0.5

ب- احسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f_n 0.5

ج- بين أن $f_n(u_n) = \frac{1}{2u_n^2}$ 0.25

(2) أ- تأكد أن $u_1 = 1$ وبين أن $u_0 \in]1, 2[$. 0.5

ب- ادرس الوضع النسبي ل (C_n) و (C_m) حيث n و m من \mathbb{N} 0.25

ج. بين أن (u_n) تناقصية قطعا واستنتج أنها متقاربة . 0.5

(3) أنشئ في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ المنحنيين (C_0) و (C_1) . 0.5

جزء 3

نعتبر الدالتين F و φ المعرفتين ب

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt; x > 0 \\ F(0) = \int_0^1 \varphi(t) dt; \end{array} \right. \text{ و } \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) = \frac{\arctan x}{x}; x > 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{array} \right.$$

(1) أ- بين أن F معرفة على \mathbb{R}^+
ب- بين أن F متصلة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^{*+} و احسب $F'(x)$ لكل x من \mathbb{R}^{*+}

0.25

0.5

(2) بين أن $F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$ $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$

0.5

(3) أ- بين أن $F(x) = (\arctan x)(\ln x) - \int_1^x \varphi(t) dt$ $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$

0.5

ب- استنتج أن F متصلة في الصفر

0.25

ج- بين أن $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$ $\frac{F(x) - F(0)}{x} \leq \varphi(x)(\ln x)$ غير قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصلة .

0.5

(4) لكل k من \mathbb{N} نضع $I_k(x) = \int_1^x t^k \ln t dt$ $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$

0.5

أ - باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :

$$(\forall x > 0)(\forall k \in \mathbb{N}) \quad I_k(x) = \frac{1}{k+1} x^{k+1} \ln x - \frac{1}{(k+1)^2} x^{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

ب - احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} I_k(x)$ ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$

0.5

ت - بين أن $(\forall x > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{x^2+1} = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{x^2+1} + \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k}$

0.25

ث - استنتج أن $(\forall x > 0) : F(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) + (-1)^{n+1} \int_1^x t^{2n+2} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$

0.5

ج - استنتج أن $(\forall x \in]0; 1[) : \left| F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) \right| \leq I_{2n+2}(x)$

0.25

$$(5) \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ نضع } V_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$$

أ - باستعمال السؤال 4 أ - بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |F(0) - V_n| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$

0.5

ب - استنتج أن (V_n) متقاربة و حدد قيمة مقربة للعدد $F(0)$ بالدقة 10^{-2} .

0.5